ITERATIONEN

und einige Anwendungen

Referat,

gehalten am 31.März 1989

im Rahmen der

Lehrerfortbildungstagung 1989

(veranstaltet von der

Didaktik-Kommission

der

Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

und dem

Pädagogischen Institut des Bundes für Niederösterreich)

Mag. Josef PECH

Inhaltsübersicht: Seite

1.) DAS VERFAHREN VON NEWTON-RAPHSON

1. Bsp.: $x^2-2x+2=0$ Nach der bekannten Formel ergeben sich die beiden Lösungen $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2}=1\pm i$

wendet man das Näherungsverfahren von NEWTON an, so ergibt sich:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-2x_k+2}{2x_k-2}=\ldots=\frac{x_k^2-2}{2x_k-2}$$

Formel von NEWTON:

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Bei Anwendung von reellen Startwerten ergeben sich divergente Folgen. Z.B.: $\langle 5;2{,}87;1{,}67;0{,}59;2{,}01;\ldots;-16{,}03;\ldots\rangle$
Das ist klar, da es keine reellen Nullstellen gibt.

Verwendet man jedoch eine komplexe (nicht reelle) Startzahl $x_1=i$, so ergibt sich die Folge
$\langle i;\ \frac{3}{4}+\frac{3}{4}i;1{,}075+0{,}975i;0{,}998+0{,}997i;\ldots\rangle$

Diese Folge scheint gegen $1+i$ zu konvergieren.

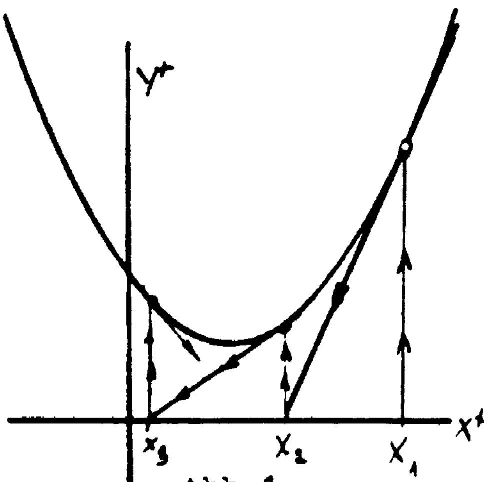

Abb.1

2. Bsp.: $x^3-1=0$ (Bestimmung der 3. Einheitswurzel)

NEWTON: $f(x)=x^3-1$; $f'(x)=3x^2$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-1}{3x_k^2}=\frac{2x_k^3+1}{3x_k^2}$$

Für $x_1=i$ erhält man die Folge $\langle i;-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i;-0{,}58+0{,}92i;\ldots\rangle$

die nach $-0{,}5+0{,}866031$ konvergiert.

Exakter Wert: $e^{\frac{2\pi i}{3}}=-0{,}5+0{,}8660i$

2.) ITERATION

3.Bsp.: $x^3-2x^2-x+1=0$ Methode: Auflösung der Gleichung auf irgendeine Art nach x.

Z.B.: (I) $x=x^3-2x^2+1$ ergibt $x_{k+1}=x_k^3-2x_k^2+1$

ODER: (II) $x=\sqrt{\frac{x^3-x+1}{2}}$ ergibt $x_{k+1}=\sqrt{\frac{x_k^3-x_k+1}{2}}$

ODER: (III) $x=\sqrt[3]{2x^2+x-1}$ ergibt $x_{k+1}=\sqrt[3]{2x_k^2+x_k-1}$

Numerisch:

I	II	III
$\langle 1;0;1;0;1;..\rangle$ div. $\langle 2;1;0;...\rangle$ div. $\langle 0{,}5;0{,}63;0{,}64;0{,}67;$ $0{,}40;..;0{,}99;0{,}01;..\rangle$ divergiert immer? Ja, Bew. später.	$\langle 1;0{,}71;0{,}57;0{,}55;..\rangle$ konv. nach 0,55495813= $=\alpha_1$	$\langle 1;1{,}26;1{,}51;1{,}72;..\rangle$ konv. nach $\alpha_2=2{,}246979601$

3.) KONVERGENZ von ITERATIONSVERFAHREN

Frage: Wann konvergiert ein Iterationsverfahren der Form $x_{k+1}=F(x_k)$?

In einem Lösungspunkt α ist $\alpha=F(\alpha)$.
Das Iterationsverfahren definiert eine Folge x_k, mit $x_{k+1}=F(x_k)$.

Ges.: $\alpha=\lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Sei $\alpha-x_k=\varepsilon_k$ der Fehler im k-ten Schtitt.

Wir denken uns F(x) in eine Taylorreihe (um $x_0=\alpha$) entwickelt (ohne weitere Gedanken über die Möglichkeit der Entwicklung).

Also $F(x)=\underbrace{F(\alpha)}_{\alpha}+F'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{F''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\ldots$

speziell: $x:=\alpha-\varepsilon_k=x_k$

$$F(x_k) = \alpha + F'(\alpha)(-\varepsilon_k) + \dots$$

$$x_{k+1} = \alpha - F'(\alpha)\cdot\varepsilon_k + \frac{F''(\alpha)}{2!}(x_k - \alpha)^2 + \dots$$

$$x_{k+1} - \alpha = -F'(\alpha)\cdot\varepsilon_k + \frac{F''(\alpha)}{2!}(\varepsilon_k)^2 + \dots$$

$$\alpha - x_{k+1} = \boxed{\varepsilon_{k+1}} = \varepsilon_k F'(\alpha) - \frac{1}{2}\varepsilon_k^2 F''(\alpha) + \dots$$

<u>1.Fall:</u> <u>$F'(\alpha) \neq 0$</u> Für kleine ε_k gilt in erster Näherung: $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k F'(\alpha)$ (d.h. ε_{k+1} ist von derselben Größenordnung wie ε_k (allerdings nicht im physikalischen Sinn)).

Damit die Iteration konvergent sein kann, muß $|\varepsilon_{k+1}| < |\varepsilon_k|$ sein.

Das ist erfüllt, wenn $|F'(\alpha)| < 1$.

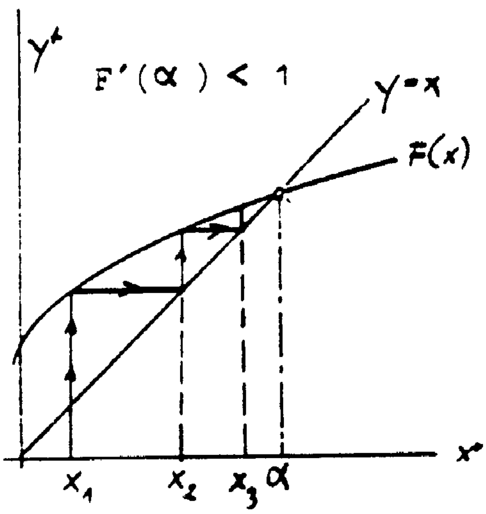

Abb.2

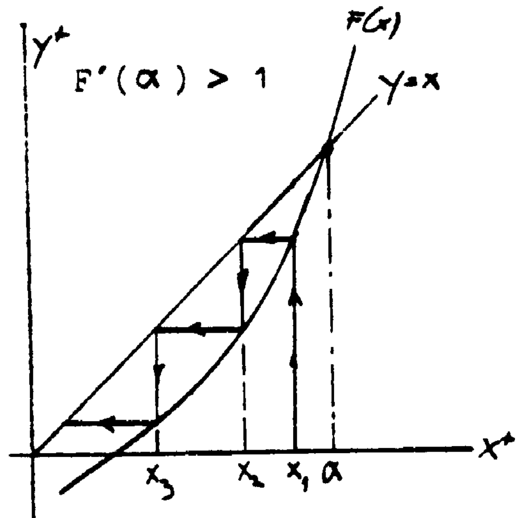

Abb.3

<u>2.Fall:</u> <u>$F'(\alpha) = 0$</u>; <u>$F''(\alpha) \neq 0$</u>

Somit $\varepsilon_{k+1} = -\frac{1}{2}\varepsilon_k^2 F''(\alpha) = \varepsilon_k^2 \underbrace{\left(-\frac{F''(\alpha)}{2}\right)}_{\text{Zahl}}$,

also ε_{k+1} ist von der Größenordnung ε_k^2 (Iteration 2.Ordnung).

Wieder: Konvergenz, wenn $|\varepsilon_{k+1}| < |\varepsilon_k|$.

Also: $\left|\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}\right| = |\varepsilon_k \cdot \text{Zahl}| < 1$

immer machbar, wenn ε_k klein genug gewählt wird.

Somit gilt: Ein Iterationsverfahren 2.Ordnung konvergiert, wenn der Startwert x_1 nahe genug bei α liegt.

Wir wenden die vorige Überlegung auf NEWTON-RAPHSON an:

$$x_{k+1}=\underbrace{x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{F(x_k)}$$

Ist das NEWTON-Verfahren ein Verfahren 1.oder 2.Ordnung?

$$F'=1-\frac{f'^2-f''f}{f'^2}=\frac{f'^2-f'^2+f''f}{f'^2}=\frac{ff''}{f'^2}$$

Also: $F'(\alpha)=0$, da $f(\alpha)=0$. Somit ist das NEWTON-Verfahren ein Verfahren 2.Ordnung.
Unbeantwortet bleibt die Frage, was "nahe genug" bedeutet.

<u>Nachtrag</u> : Warum divergiert das Verfahren I vom 3.Bsp.?

$$x=\underbrace{x^3-2x^2+1}_{F(x)}$$

$F'(x)=3x^2-4x$

$F'(\alpha_1)=-1{,}29$

$F'(\alpha_2)=6{,}15$

$F'(\alpha_3)=5{,}12$

Also divergiert das Verfahren für jede der drei Nullstellen.

<u>4.Bsp.</u>: $x^5-x-0{,}2=0$

<u>1.Iteration</u>: $x_{k+1}=\sqrt[5]{x_k+0{,}2}$ ergibt die Folge
$\langle 1;1{,}037;1{,}043;1{,}044;..\rangle$ konvergiert nach $\alpha_1=1{,}0447617$

<u>2.Iteration</u>: $x_{k+1}=x_k^5-0{,}2$ ergibt die Folge
$\langle 0;-0{,}2;-0{,}2003;.\rangle$ konvergiert nach $\alpha_2=-0{,}20032259$

<u>3.Iteration</u>: ("SUCHPROGRAMM")
Methode: Gehe mit Schrittweite Δx solange nach rechts, bis sgn(f(x)) wechselt. Dann wird Δx ersetzt durch $-\frac{\Delta x}{2}$.

Dann gehe mit neuem Δx solange nach links (höchstens zwei Schritte), bis sgn(f(x)) wechselt usw. Die Schrittlängen durchlaufen fast eine geometrische Folge. Das Verfahren konvergiert rasch.

Wichtig: Sinnvolle Schrittlängen und sinnvoller Startpunkt

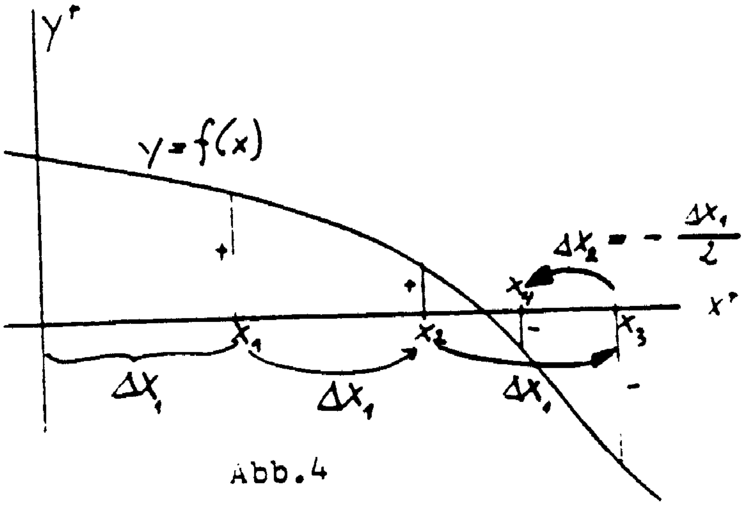

Abb.4

Anwendung des Suchprogramms auf unser Beispiel (mit $x_1=-0,9$ und $x=0,1$) liefert $\alpha_3=-0,942086866$.

Somit: $x^5-x-0,2=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(Ax^2+Bx+C)$

Die Polynomdivision liefert: $A=1$

$B=-0,097647755$

$C=1,014359448.$

Daraus ergeben sich die beiden letzten Lösungen

$\alpha_{4,5}=0,048823878\pm i.1,005970018.$

<u>4.)HERONsches Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel</u>

$3=a_1$

5.Bsp.: Berechnung von $\alpha=\sqrt{12}=\sqrt{3.4}=GM(3;4)$ $4=b_1$

Das geometrische Mittel (GM) von 3 und 4 kann ich nicht berechnen, dafür aber das arithmetische Mittel (AM) $\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$.

Bekanntlich gilt $AM\geq GM$. Also ist $\frac{7}{2}$ zu groß. Man berechnet nun eine dazupassende linke Schranke, sodaß das geometrische Mittel von $\frac{7}{2}=b_2$ und a_2 wieder $\sqrt{12}$ ergibt $\Longrightarrow a_2.b_2=12$

Also $a_2=12:b_2=12:\frac{7}{2}=\frac{24}{7}$. Es ergibt sich eine Intervallschachtelung für $\sqrt{12}$: $\left\langle [3;4]; \left[\frac{24}{7};\frac{7}{2}\right]; \left[\frac{336}{97};\frac{97}{28}\right]; \ldots\right\rangle$

Noch einmal: Kurze Beschreibung des HERONschen Verfahrens zur Berechnung von $\alpha = \sqrt{a_1 \cdot b_1} = \sqrt{c}$ $\qquad a_i, b_i \in \mathbb{Q}^+$

$$\left\langle [a_1;b_1]; [a_2;b_2]; \ldots [a_k;b_k]; [a_{k+1};b_{k+1}]; \ldots \right\rangle$$

mit $b_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k+b_k)$

$$a_{k+1} = c:b_{k+1} = \frac{a_k \cdot b_k}{b_{k+1}} = \frac{2a_k b_k}{a_k+b_k}$$

1.Beh.: $a_{k+1} > a_k$ $\qquad$ Vor.: $a_k < b_k$

Bew.: $\frac{2a_k b_k}{a_k+b_k} > a_k$

$$2b_k > a_k+b_k$$

$$b_k > a_k \qquad \text{(das ist die Voraussetzung)}$$

ebenso: $b_{k+1} < b_k$ $\qquad$ (Beweis leicht)

2.Beh.: Die Intervallängen gehen nach 0

$$b_k - a_k = |I_k| = \text{Intervallänge von } I_k$$

Bew.: $|I_{k+1}| = b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k+b_k) - \frac{2a_k b_k}{a_k+b_k} = \frac{(a_k+b_k)^2 - 4a_k b_k}{2(a_k+b_k)} =$

$$= \frac{(a_k-b_k)^2}{2(a_k+b_k)} = \frac{(b_k-a_k)^2}{a_k+b_k} \cdot \frac{1}{2}$$

Wir betrachten den Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden Intervallängen (dahinter steht die Hoffnung, es könnte sich um eine GF handeln, ODER es könnte eine Majorante sichtbar werden).

$$\frac{|I_{k+1}|}{|I_k|} = \frac{\frac{(b_k-a_k)^2}{a_k+b_k} \cdot \frac{1}{2}}{b_k-a_k} = \frac{b_k-a_k}{a_k+b_k} \cdot \frac{1}{2}$$

Zahl < 1

Beh.: $\frac{b_k-a_k}{a_k+b_k} < 1$

$$b_k - a_k < a_k + b_k$$

$$-a_k < a_k \qquad \text{O.K.}$$

Somit ist $\frac{|I_{k+1}|}{|I_k|} < \frac{1}{2}$. $\quad$ Also ist $\left\langle |I_1| \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \right\rangle$ eine Majorante.

Somit liegt eine rationalwertige Intervallschachtelung vor.

5.) Berechnung DEKAD.LOGARITHMEN

"quadrieren und durch 10 dividieren"

z.Bsp.: $^{10}\log 7 = x \Leftrightarrow 10^{x} = 7 \quad |\ ^2 \qquad x \in [0;1]$

$$\begin{array}{lll}
10^{2x} = 49 & |:10 & \\
10^{2x-1} = 4{,}9 & |\ ^2 & 0 < 2x-1 < 1 \\
 & & x \in [\tfrac{1}{2};1] \\
10^{4x-2} = 24{,}01 & |:10 & \\
10^{4x-3} = 2{,}401 & |\ ^2 & 0 < 4x-3 < 1 \\
 & & x \in [\tfrac{3}{4};1] \\
10^{8x-6} = 5{,}764801 & |\ ^2 & \\
10^{16x-12} = 33{,}2329.. & |:10 & \\
10^{16x-13} = 3{,}32329.. & & 0 < 16x-13 < 1 \\
 & & x \in [\tfrac{13}{16};\tfrac{14}{16}]
\end{array}$$

usw.

Nachteil: Rundungsfehler wirken sich bald aus.
Vergleiche: Iterationsverfahren wirken "selbstregulierend".
D.h. immer kann man einen Punkt x_k als Startpunkt ansehen und verbesserte Werte $x_{k+1}, ..$ bestimmen.

6.) ALGEBRAISCHE und NICHTALGEBRAISCHE reelle Zahlen

1.Klasseneinteilung von R: In bekannter Weise teilt man R in rationale und nicht rationale Zahlen ein.
Satz: Q^+ ist abzählbar ($\Leftrightarrow$ gleichmächtig wie N)
Beweis mittels CANTORschem Diagonalverfahren:

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\[1em]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots \\[1em]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdots
\end{array}$$

Also Q^+ (und somit Q) läßt sich als Folge schreiben.
Satz: R ist nicht abzählbar (wir betrachten nur das Intervall $[0;1]$).
Bew.: Angenommen es gäbe eine Folge $\langle x_1, x_2, ... \rangle$ aller reeller Zahlen aus obigem Intervall etwa in Dezimaldarstellung

etwa $x_1=0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$

$x_2=0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$ $\qquad a_{ik}\in\{0;1;\ldots;9\}$

$x_3=0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

so lassen sich sofort Zahlen aus dem Intervall angeben, die in der Folge $\langle x_k\rangle$ nicht vorkommen: z.B.die Zahl $0,b_1b_2b_3\ldots$ mit $b_1\neq a_{11}$; $b_2\neq a_{22}$;... Wid.
Also hat R eine größere Mächtigkeit als Q.

2.Klasseneinteilung von R: Sei $x\in R$
Def.: Eine Zahl x heißt algebraisch, wenn sie Nullstelle eines Polynoms p(x) ist.

$$p(x)=A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0 \quad \text{mit } A_i\in Z$$

Satz: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar. (!)
Bew.: Zum Beweis des Satzes benützen wir die Definition der HÖHE h eines Polynoms: $h=n+|A_n|+|A_{n-1}|+\ldots+|A_0|$
Klar ist: Zu jeder Höhe gibt es nur endlich viele Polynome.
Z.B.: zur Höhe h=4 gibt es folgende Polynomgleichungen

$\pm x^3=0$

$\pm 2x^2=0 \quad \pm x^2\pm x=0 \quad \pm x^2\pm 1=0$

$\pm 3x=0 \quad \pm 2x\pm 1=0 \quad \pm x\pm 2=0$

weiters: Jedes Polynom n-ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen.
Man denke sich also zu jeder Höhe h=2;3;4;... jeweils alle Polynome (die endlich vielen zu einer speziellen Höhe in beliebiger Reihenfolge),sowie zu jedem Polynom alle Nullstellen (wieder in beliebiger Reihenfolge) angeschrieben.
Das ergibt eine Folge aller algebraischer Zahlen.

Bemerkenswerterweise vergrößert die Betrachtung aller Lösungen aller Polynomgleichungen p(x)=0 die Mächtigkeit der Menge aller Lösungen der Gleichung $A_1x+A_0=0$ nicht! ($A_1,A_0\in Z$) (Es handelt sich jedoch nicht um dieselbe Menge.)
Polynome(mit ganzzahligen Koeffizienten) vom Grad n haben höchstens n (reelle) Nullstellen.
Nicht-algebraische Zahlen heißen transzendent.

7.) Das arithmetische und das geometrische Mittel (AM;GM)

7.Bsp.: Gegeben sind zwei Punkte $A_1(2/1)$;$A_2(7/5)$ und eine Folge $\langle A_K\rangle$ mit $\overrightarrow{CA}_{K+2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}_K+\overrightarrow{CA}_{K+1})$ ..Halbierungspkt von $\overline{A_1A_2}$

Ges.: Grenzwert der Folge

Wir betrachten die Projektionen auf die x-Achse. Das ergibt die Folge $\langle a_K\rangle=\langle 2;7;\frac{9}{2};..\rangle$ mit $a_{K+2}=\frac{1}{2}(a_K+a_{K+1})$.

Zur expliziten Darstellung benützen wir einen zweistufigen Ansatz:

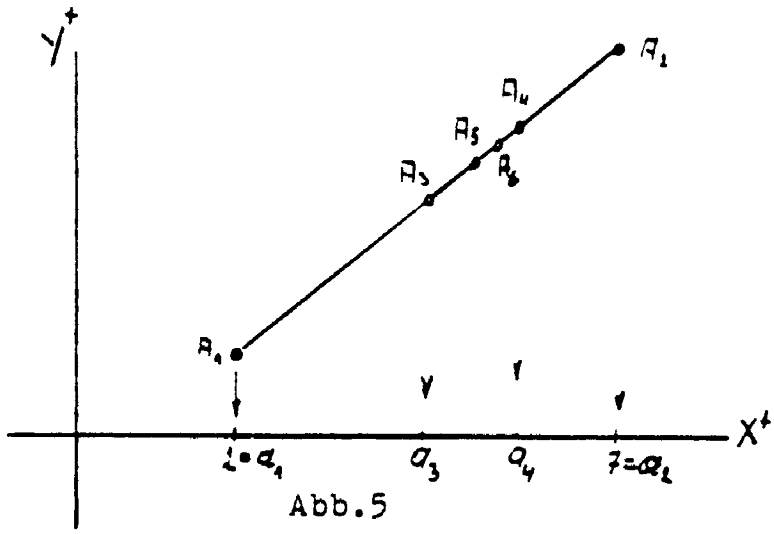

Abb.5

(1) $a_n=q^n$

$q^{n+2}=\frac{1}{2}(q^n+q^{n+1})$

$2q^2=1+q$

$2q^2-q-1=0$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $q_1=1$, $q_2=-\frac{1}{2}$.

(2) $a_n=Aq_1^n+Bq_2^n$

$$\left.\begin{array}{ll} n=1: & 2=A-\frac{1}{2}B \\ n=2: & 7=A+\frac{1}{4}B \end{array}\right\}$$ führt auf $A=\frac{16}{3}$ und $B=\frac{20}{3}$

Somit erhält man die explizite Darstellung

$\langle a_K\rangle=\left\langle\frac{16}{3}+\frac{20}{3}(-\frac{1}{2})^K\right\rangle$, deren Limes sich sofort als $\frac{16}{3}$ erkennen läßt. Das ergibt somit den Limes der gegebenen Folge $(\frac{16}{3}/\frac{11}{3})$.

8.Bsp.: Gegeben ist die Folge $a_1=1$; $a_2=10$ und

$a_{K+2}=\sqrt{a_Ka_{K+1}}$.

Ges.: Limes

$\langle a_K\rangle=\langle 1;10;\sqrt{1.10};\sqrt{10\sqrt{10}};...\rangle$

Wir betrachten die Folge der Exponenten von

$\langle a_K\rangle=\langle 10^0;10^1;10^{\frac{1}{2}};10^{\frac{3}{4}};...\rangle$ nämlich $\langle e_n\rangle=\langle 0;1;\frac{1}{2};\frac{3}{4};...\rangle$

mit dem Bildungsgesetz $e_1=0; e_2=1$ und $e_{n+2}=\frac{1}{2}(e_n+e_{n+1})$.
Wieder führt der zweistufige Ansatz mit

1. $e_n=q^n$ auf $q_1=1$; $q_2=-\frac{1}{2}$
2. $e_n=Aq_1^n+Bq_2^n$ auf $A=\frac{2}{3}$ und $B=\frac{4}{3}$.

Somit ergibt sich die Exponentenfolge $\langle e_n\rangle=\langle\frac{2}{3}\cdot 1^n+\frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n\rangle$, deren Limes $\frac{2}{3}$ beträgt.
Damit ergibt sich der Limes der gegebenen Folge $\langle a_n\rangle$ mit $10^{\frac{2}{3}}=4{,}6415..$

8.) Rekursive Doppelfolge zur Berechnung von π

Einem Kreis wird ein reguläres n-Eck derart eingeschrieben, daß der Umfang des n-Ecks gleich 1 ist. (z.B. ein Quadrat mit Seitenlänge $a_1=\frac{1}{4}$)

Nächster Schritt: Man konstruiert ausgehend vom n-Eck ein reguläres 2n-Eck, das wieder Umfang 1 hat. (Das erfordert natürlich einen anderen Umkreisradius.) usw.
Wir erhalten eine Folge von regulären 2^n-Ecken (alle mit Umfang 1), deren Umfänge sich dem jeweiligen Kreisumfang immer mehr nähern. Im Grenzfall: $U=2r\pi=1$

$$r=\frac{1}{2\pi}$$

Interessant ist also die Folge der Radien der Umkreise der n-Ecke.

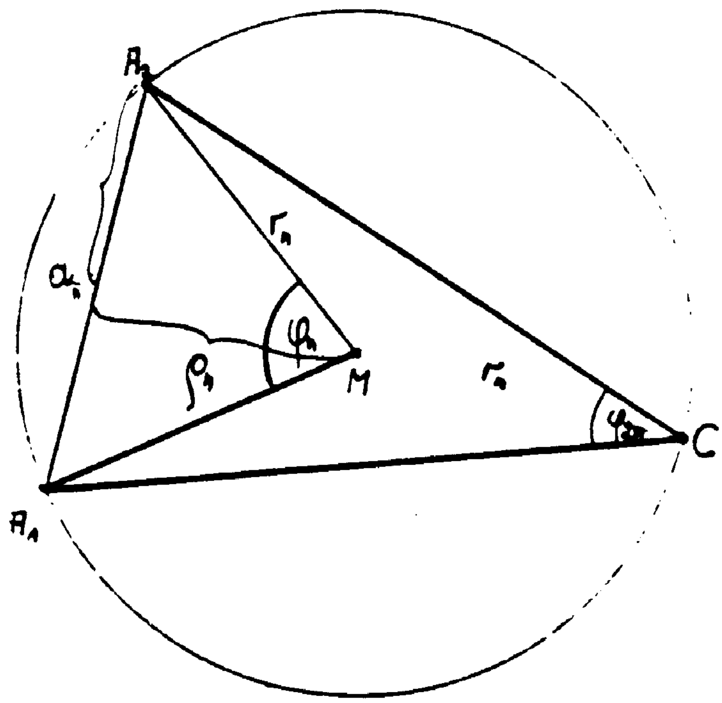

Abb.6

Sei a_n die Seitenlänge des regulären n-Ecks, sodaß $n.a_n=1$ ist. φ_n sei der zugehörige Zentriwinkel. Damit ergibt sich nach dem Peripheriewinkelsatz $\varphi_{2n}=\frac{1}{2}\varphi_n$. Das Dreieck A_1A_2C wird im Verhältnis 2:1 verkleinert. (Das läßt den Umfang des 2n-Ecks wieder 1 werden.) Aus Abb.7 sieht man $\boxed{\rho_{2n}=\frac{\rho_n+r_n}{2}}$

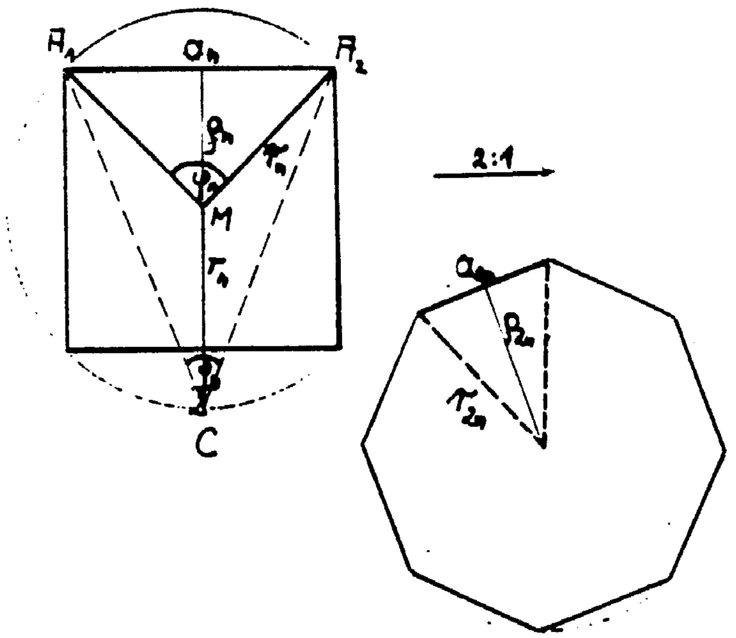

Abb.7

Im Dreieck A_1A_2M gilt:

$(\frac{a_n}{2})^2+\rho_n^2=r_n^2$.

Im Dreieck A_1A_2C gilt:

$(\frac{a_n}{2})^2+(\rho_n+r_n)^2=(2r_{2n})^2$

$r_n^2-\rho_n^2+\rho_n^2+2\rho_n r_n+r_n^2=4r_{2n}^2$

$2r_n(r_n+\rho_n)=4r_{2n}^2$

$r_n\boxed{\frac{r_n+\rho_n}{2}}=r_{2n}^2$

also:

$$r_n\cdot\rho_{2n}=r_{2n}^2$$

oder: $r_{2n}=\sqrt{r_n\cdot\rho_{2n}}$

Somit erhalten wir zwei gekoppelte rekursive Folgen

$$\boxed{\rho_{2n}=\frac{\rho_n+r_n}{2}} \quad ; \quad \boxed{r_{2n}=\sqrt{r_n\cdot\rho_{2n}}}$$

Startet man mit dem Quadrat ($a_1=\frac{1}{4}$), so ist $\rho_1=\frac{1}{8}$ und $r_1=\frac{\sqrt{2}}{8}=$ =o,1768. Wir erhalten die beiden Folgen

$$\left\langle r_{2^n}\right\rangle=\left\langle 0{,}1768;0{,}1633;0{,}1602;0{,}1594;0{,}1592;\ldots\right\rangle$$

$$\left\langle \rho_{2^n}\right\rangle=\left\langle 0{,}125;0{,}1509;0{,}1571;0{,}1586;0{,}1590;\ldots\right\rangle$$

Beide Folgen konvergieren nach 0,159155 (ein Näherungswert für $\frac{1}{2\pi}$).

9.) Was heißt "nahe"?

9.Bsp.: $x^3-3x^2-6x+6=0$ Eine Nullstelle liegt sicher im Intervall $[0;1]$, da $f(0)=6$ und $f(1)=-2$ ist.
Eine mögliche Rekursion z.B. ist $x_{k+1}=\frac{1}{6}(x^3-3x^2+6)=F(x)$.
Mit verschiedenen Startzahlen ergeben sich die Folgen

$\langle \underline{5};9,3;93,0;129527,\ldots\rangle$ div.
$\langle \underline{3};1;0,67;0,83;0,75;\ldots\rangle$ kon.
$\langle \underline{4};5,67;2,49;0,48;0,90;.\rangle$ kon.
$\langle \underline{-2};-2,33;-3,84;-15,80;.\rangle$ div.
$\langle \underline{-1};0,33;0,95;0,69;0,82;.\rangle$ kon.

Die Iteration ist eine Iteration 1.Ordnung und konvergiert nur für Startwerte <u>nahe</u> dem Grenzwert α . Aus Abb.8 ist ersichtlich, daß für Startwerte zwischen den beiden äußeren Schnittpunkten mit der 1. Mediane die Iteration konvergiert und außerhalb divergiert (In der Abb. ist je ein konvergenter und ein divergenter Weg eingezeichnet.)
Der Limes der konvergenten Iterationen ist 0,77653792.

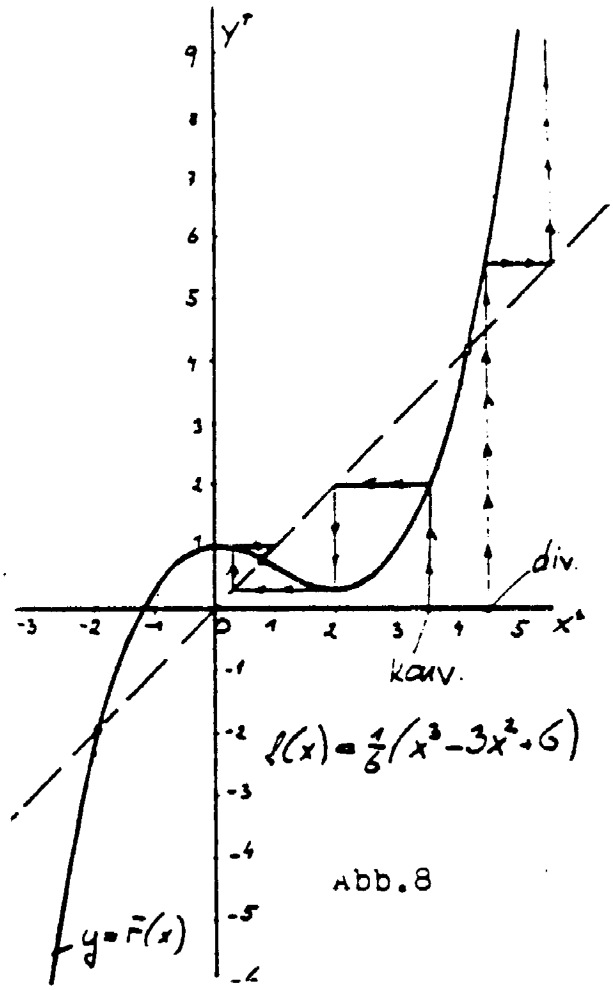

Abb.8

10.) Anwendungen Iterativer Methoden

10.Bsp.: Gesucht sind 4 Zahlen a,b,c,d, die folgenden Bedingungen genügen:

I $a^2=b$

II $a+b+c+d=1$

III $4ab+c=d$

IV $ab=cd$

Wir gewinnen daraus eine Iteration der Form $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$

Die verbesserten Werte erhalten wir aus

① $b_{n+1}=a_n^2$

② $a_n+b_n+c_n+d_n=S$

③ $a_{n+1}=\frac{a_n}{S}$ ④ $b_{n+1}=\frac{b_n}{S}$ ⑤ $c_{n+1}=\frac{c_n}{S}$ ⑥ $d_{n+1}=\frac{d_n}{S}$

⑦ $d_{n+1}=4a_nb_n+c_n$

⑧ $a_{n+1}=\frac{c_nd_n}{b_n}$

Bemerkung: In den acht Punkten sind die"="-Zeichen im Sinne einer Zuweisung zu verstehen, etwa "wird belegt mit". Nach jeweils einem Durchgang erhält man verbesserte Wert. (ausgehend von 4 Startzahlen z.B. a=b=c=d=1).

a_n	b_n	c_n	d_n
1	1	1	1
0,50	0,25	0,25	0,50
0,39	0,17	0,17	0,39
o,38	0,14	0,15	0,35
0,37	0,14	0,15	0,36
....	....	....	....
0,370	0,137	0,145	0,348

Das sind die Lösungszahlen(auf 3 Rkst.).

11.Bsp.: Gesucht sind drei Zahlen x,y,z, die folgenden Bedingungen genügen:

I $x^2+y^2+z^2 \leq 2$

II $z=2xy-0,2$

III $3xz+y=0,5$

Wieder geben wir eine Iteration für $(x_n \ \ y_n \ \ z_n)$ an.
Die Ungleichung I wird mittels der <u>Schlupfvariablen</u> t in die Gleichung I' $x^2+y^2+z^2+|t|=2$ übergeführt.
Verbesserte Werte erhalten wir aus

① $S=x_n^2+y_n^2+z_n^2+|t_n|$

② $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2\sqrt{S}}$ ③ $y_{n+1}=\dfrac{y_n}{2\sqrt{S}}$ ④ $z_{n+1}=\dfrac{z_n}{2\sqrt{S}}$ ⑤ $t_{n+1}=\dfrac{t_n}{2\sqrt{S}}$

⑥ $z_{n+1}=2x_ny_n-0,2$

⑦ $y_{n+1}=0,5-3x_nz_n$

Wieder sind die "="-Zeichen als Zuweisung -etwa "wird belegt mit"- zu verstehen.
Wir erhalten mit den Startwerten x=y=z=1 folgende Tabelle:

x_n	y_n	z_n
1	1	1
0,35	0,44	0,05
0,29	0,48	0,02
0,27	0,46	0,03
0,26	0,47	0,03
....	....	....
0,2488	0,4735	0,0355

Das ist ein mögliches Lösungstripel.

Es gibt noch andere Lösungstripel: (0,2236 o,4878 0,0182); (0,3536 0,4069 0,0877);..

12.Bsp.: Wieder sind 4 Zahlen a,b,c,d gesucht mit den Eigenschaften

I $ac-bd=0$

II $a^2c=b^2d$

III $a+b+c+d=1$

1.iterative Auflösung: ① $a_{n+1}=\frac{b_nd_n}{c_n}$; ② $d_{n+1}=\frac{a_n^2c_n}{b_n^2}$

③ $a_n+b_n+c_n+d_n=S$; ④ $a_{n+1}=\frac{a_n}{S}$; ⑤ $b_{n+1}=\frac{b_n}{S}$;

⑥ $c_{n+1}=\frac{c_n}{S}$; ⑦ $d_{n+1}=\frac{d_n}{S}$;

a	b	c	d
1	1	1	1
0,25	0,25	0,25	0,25

stabil

a	b	c	d
1	-2	3	-4
0,29	-0,22	0,33	0,59
-0,51	-0,29	0,43	1,37
-0,26	-0,08	0,22	1,22
.....	.....	....	....
0	0	0	1

stabil

---

2. iterative Auflösung: ① $c_{n+1}=\frac{b_nd_n}{a_n}$; ② $a_n+b_n+c_n+d_n=S$;

③ $a_{n+1}=\frac{a_n}{S}$; usw. ⑦ $a_{n+1}=\sqrt{\frac{b_n^2d_n}{c_n}}$;

a	b	c	d
1	1	1	1
0,25	0,25	0,25	0,25

stabil

a	b	c	d
1	2	3	4
o,09	0,13	0,53	0,27
0,13	0,15	0,43	0,31
0,15	0,16	0,38	0,32
....	....	....	....
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

11.) Anwendung auf ein Integral

13.Bsp.: $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x . \sin x \, dx =$

$$u = \sin^{2n} x \qquad v = -\cos x$$
$$du = 2n . \sin^{2n-1} x . \cos x; \quad dv = \sin x \, dx$$

partiell: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$= -\sin^{2n} x . \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x . 2n . \sin^{2n-1} x . \cos x . dx =$

$= -\cos x . \sin^{2n} x \Big|_0^{\pi/2} + 2n . \int_0^{\pi/2} \cos^2 x . \sin^{2n-1} x \, dx =$

$= -\cos x . \sin^{2n} x \Big|_0^{\pi/2} + 2n \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^{2n-1} x \, dx =$

$= \quad 0 \quad + 2n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx - 2n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx$

somit $(1+2n) . \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = 2n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{1+2n} . \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx$$

nochmalige Anwendung der partiellen Integration führt auf:

$$I_n = \frac{2n}{1+2n} . \frac{2n-2}{2n-1} . \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-3} x \, dx = \text{usw.} = \frac{2n}{1+2n} . \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} . \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = 1 . \frac{2}{3} . \frac{4}{5} . \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \Pi(n)$$

Das ergibt die Tabelle:

n	Π(n)
1	0,6667
2	0,5333
3	0,4571
4	0,4063
....	
50	0,1244
500	0,0396
5000	0,012532
10000	0,008862

$$I_n = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx$$

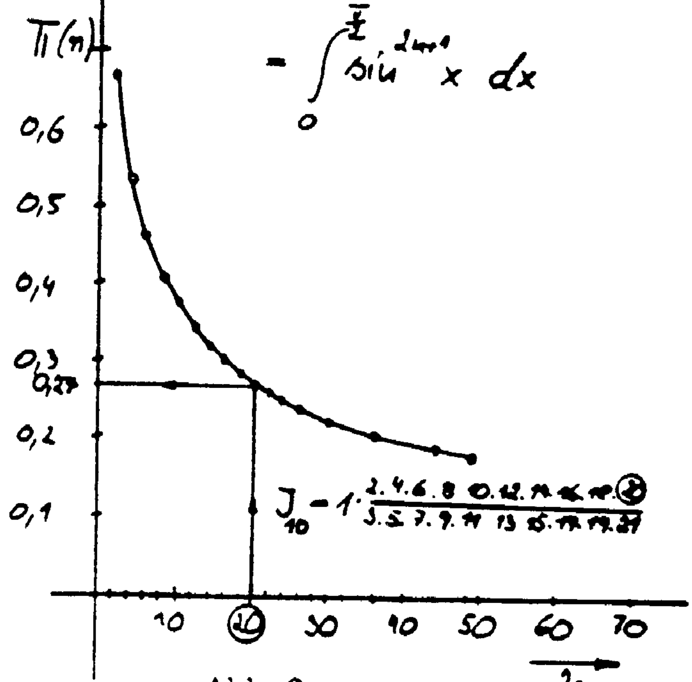

Abb.9

Bem.: Die Tabelle gibt Anlaß zur Vermutung, daß

$$\lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} \cdots = 0$$

Begründung: Der Grenzgraph des Integranden (für $n \to \infty$) ist konstant 0 mit Ausnahme an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ($f(\frac{\pi}{2}) = 1$) und somit der Wert des Integrals gleich 0.

Beachte: Die Trägerkurve des Graphen der Funktion $f: n \to \overline{\Pi}(n)$ wurde nicht in Gleichungsform angegeben.

12.) Kurzer Intelligenztest

Gib das nächste Glied der Folge durch Ankreuzen an:

Musterbeispiel: $\langle 2;4;6;.. \rangle$

4	8	10	-7
	x		

Beispiel: $\langle 1;2;3;.. \rangle$

7	5	4	-2

Lösung: Bemerkenswerterweise sind mehrere Lösungen richtig:

a) 7 ergibt sich aus der rekursiven Folge $a_{n+2} = 5a_n - a_{n+1}$

b) 5 ergibt sich aus der rekursiven Folge $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

c) -2 ergibt sich aus der rekursiven Folge $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 13a_n$

In allen drei Fällen sei $a_1 = 1; a_2 = 2$.